2-Ч

УДК 004.032.26:004.8

П.В. Четырбок
Ялтинский филиал Европейского университета, г. Ялта, Украина
petr58@mail.ru

Скалярный критерий распознавания образов – функционал качества системы управления

В данной работе построено отображение множества образов на множество вещественных чисел из интервала [0,1], которое позволяет формализовать понятие качества процесса стабилизации системы управления. Задавая определенные интервалы для значений скалярного критерия, можем судить о том, насколько велики выходные сигналы в системе для определенных классов сигналов на ее входе. Если в качестве этих сигналов рассматривать внешние возмущающие воздействия, отклоняющие движения объекта от контролируемого, то качество процесса стабилизации будет тем выше, чем сильнее они подавляются системой.

Введение

Основу оптимизационных задач составляет формализация представления о качестве функционирования систем управления. Формализация предполагает построение некоторой системы количественных характеристик качества функционирования, величины которых зависят от принимаемых проектных решений. Качество функционирования современных систем управления может быть характеризовано широким спектром различных функционалов, в зависимости от конкретных задач, объектов управления и условий их эксплуатации. В статье рассмотрен скалярный критерий распознавания образов в качестве функционала качества процесса стабилизации системы управления.

Цель статьи – построение функционала качества процесса стабилизации системы управления. Функционал равен скалярному произведению нормированных векторов ошибок при распознавании нейронной сетью образов и соответствующих им эталонов. Скалярный критерий распознавания образов (сигналов) вычисляется следующим образом:

$$\cos(\lambda) = \frac{(\overline{E}, \overline{X})}{\left\|\overline{E}\right\|_c \left\|\overline{X}\right\|_c},$$

где E – вектор ошибок в пространстве ошибок, полученный при распознавании нейронной сетью входного образа, X – вектор ошибок, полученный при распознавании нейронной сетью эталона. Задавая определенные интервалы для значений скалярного критерия, можно судить о том, насколько велики выходные сигналы в системе для определенных классов сигналов на ее входе. Если в качестве этих сигналов рассматривать внешние возмущающие воздействия, отклоняющие движения объекта от контролируемого, то качество процесса стабилизации будет тем выше, чем сильнее они подавляются системой.

Постановка задачи

Рассмотрим устойчивую систему, представленную математической моделью вида

$$e = Hd, d,\ e \in E^k, \tag{1}$$

где H – матрица весовых коэффициентов нейронной сети, e – выходной образ (векторный сигнал), d – входной образ (векторный сигнал), k – размерность пространства образов.

Построим функционал, который равен скалярному произведению нормированных векторов ошибок при распознавании нейронной сетью образов (сигналов) и соответствующих им эталонов. Скалярный критерий распознавания образов (сигналов) вычислим следующим образом:

$$\cos(\lambda) = \frac{(\overline{E}, \overline{X})}{\left\|\overline{E}\right\|_c \left\|\overline{X}\right\|_c}, \tag{2}$$

где E – вектор ошибок в пространстве ошибок, полученный при распознавании нейронной сетью входного образа, X – вектор ошибок, полученный при распознавании нейронной сетью эталона. Таким образом, построено отображение множества входных образов (сигналов) на множество действительных чисел. Это отображение разбивает множество векторов входных сигналов на классы. Отображение является отношением эквивалентности, то есть оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Отображение разбивает множество векторов входных сигналов на непересекающиеся классы. Отображение состоит из композиции двух отображений. Сначала множество векторов входных сигналов отображается на трехмерное векторное пространство ошибок, а затем множество векторов ошибок отображается на подмножество множества действительных чисел.

Рассмотрим трехмерное векторное пространство ошибок и покажем, что степень сходства входных образов для нейронной сети напрямую зависит от степени сходства векторов ошибок, полученных при их распознавании. Степень сходства векторов ошибок определим через их скалярное произведение. Вектора ошибок x_i и x_j имеют размерность 3, их скалярное произведение $x_i^T x_j$ определяется следующим образом:

$$(x_i, x_j) = x_i^{\ T} x_j = \sum_{k=1}^{3} x_{ik} x_{jk}\ . \tag{3}$$

Если скалярное произведение векторов ошибок разделить на их норму, то получим косинус внутреннего угла между ними. Нормализуем вектора x_i и x_j

$$\|x_i\| = \|x_j\| = 1$$

Используя выражение евклидового расстояния между парой m-мерных векторов x_i и x_j:

$$d(x_i - x_j) = \|x_i - x_j\| = \left[\sum_{k=1}^{m} (x_{ik} - x_{jk})\right]^{1/2}, \tag{4}$$

где x_{ik} и x_{jk} – k-е элементы векторов x_i и x_j соответственно (4), запишем:

$$d^2(x_i, x_j) = (x_i - x_j)^T (x_i - x_j) = 2 - 2x_i^{\ T} x_j\ . \tag{5}$$

Из выражения (5) видно, что максимизация скалярного произведения $x_i^T x_j$ приводит к увеличению сходства между векторами x_i и x_j.

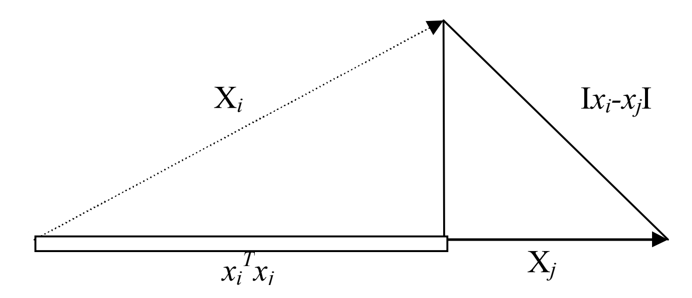


Рисунок 1 – Взаимосвязь между скалярным произведением и евклидовым расстоянием

Для нормализованных векторов ошибок из выражения (3) следует, что скалярный критерий равен скалярному произведению векторов ошибок. Если в трехмерном пространстве нормализованных векторов ошибок в качестве метрики взять выражение:

$$\rho(x_i, x_j) = \sqrt{2 - 2x_i^T x_j}\,, \tag{6}$$

то получим метрическое пространство. Покажем, что выражение (6) является метрикой, то есть :

1) $\rho(x_i, x_j) = 0$ тогда и только тогда, когда $x_i = x_j$,

2) аксиома симметрии: $\rho(x_i, x_j) = \rho(x_j, x_i)$,

3) аксиома треугольника: $\rho(x_i, x_k) \le \rho(x_i, x_j) + \rho(x_j, x_k)$.

Из выражения (6) очевидно следует первое и второе утверждение. Утверждение (3) следует из выражения (5). Более того, из выражения (5) следует, что метрическое пространство с метрикой (6) изометрическое пространству нормализованных векторов ошибок с метрикой (4).

Разработка метода управления

Рассмотрим частный случай, когда на вход устойчивой системы (1) поступает векторный сигнал *d(t)*, компонентами которого служат гармонические колебания одинаковой частоты ω_0 с различными амплитудами и фазами:

$$d(t) = \begin{bmatrix} a_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_1) \\ a_2 \sin(\omega_0 t + \varphi_2) \\ \dots \\ a_k \sin(\omega_0 t + \varphi_k) \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Выходной вектор *e(t)* в установившемся режиме движения будет иметь аналогичные гармонические компоненты, т.е.

$$e(t) = \begin{bmatrix} b_1 \sin(\omega_0 t + \psi_1) \\ b_2 \sin(\omega_0 t + \psi_2) \\ \dots \\ b_k \sin(\omega_0 t + \psi_k) \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Пусть при этом вектор $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)^T$ амплитуд входного сигнала удовлетворяет условию $\|a\| \le 1$ (евклидова норма). Тогда для вектора $b = (b_1, b_2, \dots, b_k)^T$ амплитуд выходного сигнала справедливо соотношение:

$$\|b\| \le 1 - \cos(\lambda)\,, \tag{9}$$

где $\cos(\lambda)$ – скалярный критерий (2) распознавания вектора *d(t)*.

Качество процесса управления выразим через характеристику выходного сигнала *e(t)*. В данном конкретном примере сигнал *e(t)* должен быть малым по норме, то есть $\|b\| \to 0$. Так как нейронная сеть обучена максимально подавлять входной сигнал *d(t)*, то равенство (9) показывает, с какой ошибкой она это делает для конкретного сигнала *d(t)*. Из (9) следует, что чем лучше нейронная сеть распознает сигнал, тем больше она его подавляет. Ведь *cos(λ)* в формуле (9) это ни что иное, как скалярный критерий (2) распознавания входного образа *d(t)*.

В случае изменения ω_0 и фаз входного сигнала выполняется равенство

$$1 - \cos(\lambda) = \sup_{\|a\| \le 1} \|b(a)\| \qquad (10)$$

Формула (10) констатирует тот факт, что если на вход нейронной сети подать всевозможные комбинации допустимых входных сигналов, то норма максимального выходного сигнала будет верхней границей для норм всех выходных сигналов.

Выводы

Каждому образу (сигналу), распознаваемому многослойным персептроном в многофакторном пространстве ошибок, соответствует определенное значение скалярного критерия (2). Задавая интервалы для значений скалярного критерия, можно судить о том, насколько велики выходные сигналы в системе для определенных классов сигналов на ее входе.

Литература

1. Хайкин Саймон. Нейронные сети: полный курс / Саймон Хайкин ; [пер. с англ.]. – [2-е издание]. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2006. – 1104 с.
2. Жураковський Ю.П. Теорія інформації та кодування / Ю.П. Жураковський, В.П. Полторак. – Видавництво «Вища школа», 2002. – 255 с.
3. Горбань А.Н. Обучение нейронных сетей / А.Н. Горбань. – М. : Изд. СССР-США СП «ПараГраф», 1990. – 160 с.
4. Кохонен Т. Ассоциативная память / Т. Кохонен. – М. : Мир, 1980.
5. Рассоха А.А. Скалярный критерий близости в пространстве распознаваемых образов / А.А. Рассоха, П.В. Четырбок. – Ялта : Европейский университет, 2007. – 26 с. – Укр.-Деп. в ГНТБ Украины №8 – Ук2007.

П.В. Четирбок

Скалярний критерій розпізнавання образів – фукціонал якості системи управління

У даній роботі побудовано відображення множини образів на множину дійсних чисел з інтервалу [0,1], яке дозволяє формалізувати поняття якості процесу стабілізації системи управління. Задаючи певні інтервали для значень скалярного критерію, можемо судити про те, наскільки великі вихідні сигнали в системі для певних класів сигналів на її вході. Якщо розглядати зовнішні збурювальні дії впливу, що відхиляють рухи об'єкта від контрольованого, як ці сигнали, то якість процесу стабілізації буде тим вища, чим сильніше вони пригнічуються системою.

P.V. Chetyrbok

The Scalar Criterion of Pattern Recognition – the Functional of Quality of the Management System

In the given work the reflection is built multiplicands of appearances on multiplied material numbers from interval [0,1], which allows to formalize notion of quality of process of stabilization of the system of management. Setting definite intervals for the values of scalar criterion, can judge about that, as far as large initial signals in the system for the definite classes of signals on its entrance. If as to consider these signals external revolting actions, that decline motions of object from controlled one, quality of process of stabilization will be the higher, than stronger they are repressed by the system.

Статья поступила в редакцию 24.06.2009